第 3 节 四个常见条件的翻译（★★★）

强化训练

1.（★★）已知 $f(x)=\sin(\frac{3}{4}x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$，若 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{2})$，则 $\varphi=$______.

答案：$\frac{\pi}{4}$

解析：条件 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{2})$ 怎样翻译？若代入解析式求 φ，则较麻烦，可考虑先求周期，若它们在一个周期内，则可由此推断对称轴，将对称轴代入求 φ，

由题意，$T=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{8\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间小于一个周期，

结合 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{2})$ 可得 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，所以 $\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

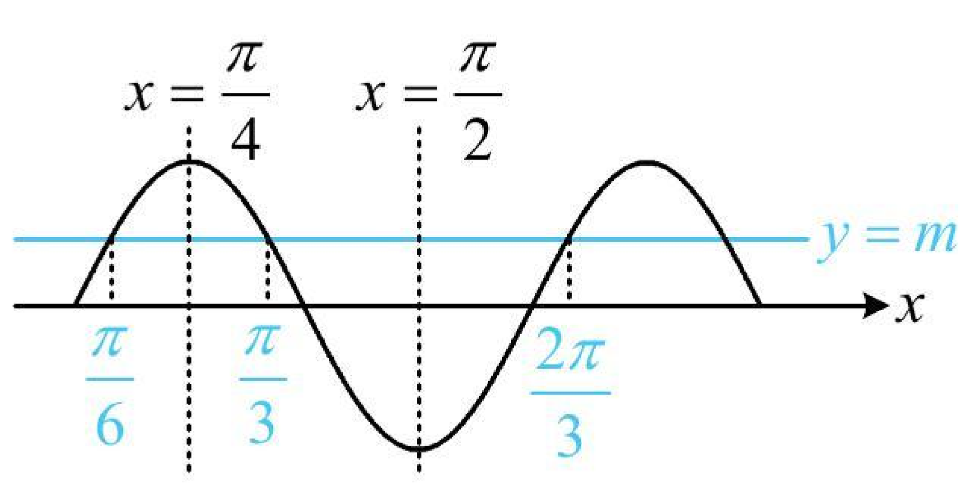
2.（2022・四川绵阳模拟・★★）若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=m$ 的三个相邻交点的横坐标分别是 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，则 $\omega=$______.

答案：4

解析：如图，水平线与 $f(x)$ 的图象的相邻两个交点的中间必定是对称轴，

由题意，$x=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 是相邻的两条对称轴，

所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=4$.



3.（2023・安徽模拟・★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega$ 为正整数，$0<\varphi<\pi$）在区间 $(\frac{\pi}{4},\pi)$ 上单调，且 $f(\pi)=f(\frac{3\pi}{2})$，则 $\varphi=$（　　）

（A）$\frac{\pi}{6}$　（B）$\frac{\pi}{4}$　（C）$\frac{\pi}{3}$　（D）$\frac{2\pi}{3}$

答案：B

解析： $f(x)$在$(\frac{\pi}{4},\pi)$上单调怎样翻译？可由内容提要 1 来推周期的范围，进而得到ω的范围，

$f(x)$在$(\frac{\pi}{4},\pi)$上单调$\Rightarrow\frac{T}{2}\ge\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow T\ge\frac{3\pi}{2}$，

所以$\omega=\frac{2\pi}{T}\le\frac{4}{3}$，又$\omega\in\mathbf{N}^*$，所以$\omega=1$，

故$T=2\pi$，且$f(x)=\sin(x+\varphi)$，

有了周期，可看看π与$\frac{3\pi}{2}$之间是否小于一个周期. 若是，则可由$f(\pi)=f(\frac{3\pi}{2})$来推断对称轴，

由$T=2\pi$知π和$\frac{3\pi}{2}$之间小于一个周期，

又$f(\pi)=f(\frac{3\pi}{2})$，所以$x=\frac{5\pi}{4}$是$f(x)$的对称轴，

从而$\frac{5\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，故$\varphi=k\pi-\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

结合$0<\varphi<\pi$可得$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

4．（★★★★）设函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上单调递减，$f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{6})$，若将函数$f(x)$图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍得到函数$g(x)$的图象，则$g(x)=$_____.

答案： $2\sin(x+\frac{\pi}{3})$

解析： 由内容提要 1，$f(x)$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上单调递减$\Rightarrow\frac{T}{2}\ge\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$，所以$T\ge\frac{2\pi}{3}$，

条件中有$f(\frac{\pi}{2})=-f(\frac{\pi}{6})$，且给了在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上单调，可由此推断对称中心，

如图，$(\frac{\pi}{3},0)$必为函数$f(x)$图象的一个对称中心，

还剩$f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})$这个条件，可由它推断对称轴，

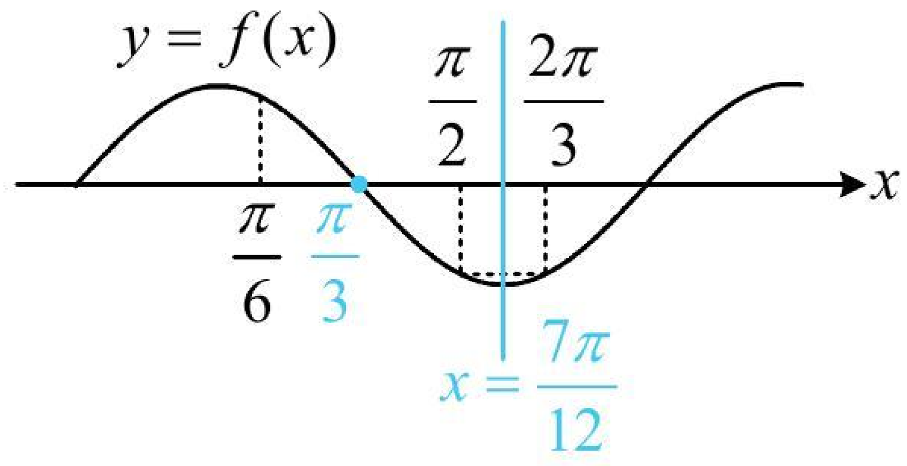
如图，$[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$的宽度小于一个周期，所以$x=\frac{7\pi}{12}$为$f(x)$图象的一条对称轴，

由图可知$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}$，所以$T=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，故$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

还需求φ，可代$x=\frac{7\pi}{12}$这个最小值点，$f(\frac{7\pi}{12})=2\sin(2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi)=-2$，所以$\sin(\frac{7\pi}{6}+\varphi)=-1$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，从而$\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}+\varphi<\frac{5\pi}{3}$，故$\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，解得：$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，由题意，$g(x)=f(\frac{x}{2})=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$.



y = f(x)
π/2
2π/3
x
π/6
π/3
x = 7π/12